

Inégalité isopérimétrique. [ZQ 103].

Formule de Green-Riemann. [Monier - Analyse 2, p. 259] 515.07

D un compact simple de $\mathbb{R}^2$ délimité par une courbe fermée (C) de classe C^1 -pm, orientée dans le sens direct.

U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant D .

$P, Q : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U .

Alors
$$\int_{(C)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx dy$$

Corollaire:

Si on paramétrise (C) par $[a,b] \rightarrow (C)$,
 $t \mapsto (x(t), y(t))$, on a

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt.$$

Dém: On prend $P(x,y) = -y$ et $Q(x,y) = x$ dans GR:

$$\int_{(C)} (-y dx + x dy) = \iint_D (1 + 1) dx dy$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{(C)} (x(t) dy(t) - y(t) dx(t)) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) dt - y(t)x'(t) dt)$$

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt.$$

Th: (inégalité isopérimétrique) [ZQ 103]

$\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe fermée et simple de classe C^1 -pm, de longueur L et enfermant une surface S .

Alors $L^2 \geq 4\pi S$, et il y a égalité ssi γ est un cercle.

Dém: par la formule de GR, $S = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt$

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_a^b \gamma'(t) \overline{\gamma(t)} dt \quad (\gamma(t) = x(t) + iy(t))$$

On paramètre γ par longueur d'arc:

$$[0, L] \rightarrow \gamma^*$$

$$s \mapsto \gamma(s)$$

$$|\gamma'(s)| = 1.$$

Quitte à changer $\gamma(s)$ en $\gamma(L-s)$, on peut supposer que γ est orientée positivement.

$\gamma(0) = \gamma(L)$ donc on peut prolonger γ en une fonction L -périodique continue et C^1 pm, donc les coeff de Fourier sont $c_n = \frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2i\pi n s}{L}} \gamma(s) ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

γ est C^∞ et C^1 pm donc $c_n(\gamma') = in \frac{2\pi}{L} c_n(\gamma)$

Parseval: $\frac{1}{L} \int_0^L |\gamma'(s)|^2 ds = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\gamma)|^2$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\gamma)|^2 = 1.$$

Soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| in \frac{2\pi}{L} c_n(\gamma) \right|^2 = 1$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L^2 n^2 4\pi^2}{L^2} |c_n(\gamma)|^2 = L^2$$

Parseval:

$$\forall f, g \in L^2, \|f\|^2 = \sum |c_n(f)|^2 \iff \forall f, g \in L^2, (f|g) = \sum c_n(f) \overline{c_n(g)}$$

Dém $\Leftarrow$ $f = g$ clair

$\Rightarrow$ identité de Parseval pour le ps de L^2 : (cas complexe)

$$(1) 4(f, g) = \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i(\|f-ig\|^2 - \|f+ig\|^2)$$

$$(2) 4 \sum c_n(f) \overline{c_n(g)} = |\sum c_n(f) + c_n(g)|^2 - |\sum c_n(f) - c_n(g)|^2 + i(|\sum c_n(f) - ic_n(g)|^2 - |\sum c_n(f) + ic_n(g)|^2)$$

D'après (2), $\sum c_n(f) \overline{c_n(g)}$ cv (somme de 4 séries cv par hyp)

Par (2), sa cv vers (f, g) . $\square$

Donc $\frac{1}{L} \int_0^L \gamma'(s) \overline{\gamma(s)} ds = \sum c_n(\gamma') \overline{c_n(\gamma)} \quad (\gamma, \gamma' \in L^2)$

$$= \sum \frac{2i\pi n}{L} |c_n(\gamma)|^2$$

Point difficile dans le L^2 . Utiliser Parseval général.

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_a^b \gamma'(t) \overline{\gamma(t)} dt = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^b \gamma'(s) \overline{\gamma(s)} ds$$

$$= \frac{1}{2} L \left(\frac{2\pi n}{L} |c_n(\gamma)|^2 \right) = \frac{2\pi}{2L} \sum n |c_n(\gamma)|^2$$

$$S = \pi \sum n |c_n(\gamma)|^2$$

$$L^2 = \sum n^2 4\pi^2 |c_n(\gamma)|^2$$

$$L^2 - 4\pi S = \sum (n^2 4\pi^2 - 4\pi^2 n) |c_n(\gamma)|^2$$

$$= \sum 4\pi^2 (n^2 - n) |c_n(\gamma)|^2 \geq 0$$

Donc $L^2 \geq 4\pi S$

Egalitéssi $c_n(\gamma) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.

$$\Rightarrow \gamma(s) = c_0 + c_1 e^{2\pi i s} \quad (0 \leq s \leq L).$$

Donc γ est un cercle. $\square$